

مبانی ریاضیات پایه

شامل سر فصل های ریاضیات عمومی و پیش دانشگاهی

مخصوص واحدهای دانشگاه علمی – کاربردی

مدرس: سودابه تصاعدیان

پیش فصل : مجموعه و اعداد

۱-۰) تعاریف

۲-۰) مجموعه های اعداد

۳-۰) اعمال در مجموعه ها

۴-۰) خواص اعمال در مجموعه اعداد حقیقی

فصل یک : توان و چند جمله ای ها

۱-۱) توان و یک جمله ای ها

۲-۱) چند جمله ای ها

فصل دو : اتحاد و تجزیه

۱-۲) اتحادهای پرکار برد

۲-۲) تجزیه با استفاده از اتحادها

۳-۲) ب.م.م یک جمله ای ها

۴-۲) فاکتورگیری

فصل سه : معادله و نا معادله

۱-۳) نکات اصلی در حل معادلات و نا معادلات

۲-۳) حل معادلات و نا معادلات

۳-۳) حل معادلات با استفاده از تجزیه

فصل چهار: رابطه و تابع

۱-۴) رابطه و حاصل ضرب دکارتی

۲-۴) مفهوم تابع

۳-۴) تعیین دامنه تابع

فصل پنج : رسم نمودار برخی توابع

۱-۵) رسم نمودار توابع درجه اول

۲-۵) رسم نمودار توابع درجه دوم

۳-۵) رسم نمودار توابع درجه سوم

۴-۵) رسم نمودار توابع رادیکالی

۵-۵) رسم نمودار توابع قدر مطلق

۶-۵) رسم نمودار توابع جزء صحیح

فصل شش : نکاتی در مورد تابع

۱-۶) توابع خاص

۲-۶) توابع چند ضابطه ای

۳-۶) اعمال جبری روی توابع

۴-۶) ترکیب توابع

فصل هفتم : تعیین علامت چند جمله ای ها و عبارات کسری

۱-۷) تعیین علامت دو جمله ای درجه اول

۲-۷) تعیین علامت سه جمله ای درجه دوم

۳-۷) تعیین علامت عبارات به صورت ضرب چند جمله ای

۴-۷) تعیین علامت عبارات کسری

مجموعه = گردآیه ای از اشیاء یا موجودات است که معمولاً با حروف بزرگ انگلیسی نشان داده میشود. مثل مجموعه A یا S
 عنصر یا عضو = هرشیء موجود در مجموعه یک عنصر یا عضوی از آن مجموعه است که معمولاً با حروف کوچک انگلیسی نشان داده
 می شود مانند : a یا s . علامت عضویت $\in$ می باشد, مثلاً اگر a عضو مجموعه A باشد و عضو مجموعه B نباشد, به این صورت
 نوشته میشود:

$$a \in A, \quad a \notin B$$

زیرمجموعه = اگر هر عضو مجموعه S عضوی از مجموعه T نیز باشد, S را زیر مجموعه T نامند و اینگونه نمایش می دهند: $S \subset T$

$$(\forall a \in S \text{ اگر } a \in T) \Leftrightarrow S \subset T$$

(علامت $\forall$ خوانده می شود: به ازای هر .)

جمله ی بالا به این شکل خوانده می شود: به ازای هر a عضو S , اگر a عضو T باشد آنگاه S زیرمجموعه ی T است و برعکس.

۰-۲) مجموعه های اعداد

۱- مجموعه اعداد طبیعی: مجموعه اعداد طبیعی را با N نمایش می دهند.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

۲- مجموعه اعداد صحیح: مجموعه اعداد صحیح را با Z نمایش می دهند.

$$Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

۳- مجموعه اعداد گویا: مجموعه اعداد گویا را با Q نمایش می دهند.

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

تعریف= یک عدد گویا عددی است که قابل بیان به صورت نسبت دو عدد صحیح باشد. مثل تمام اعضای مجموعه اعداد طبیعی و
 مجموعه اعداد صحیح, کسره های مثبت و منفی, اعشاری های مختوم مثبت و منفی (مانند: ۲,۳۵ یا $-۰,۰۰۹۲۵$) و اعشاری های

$$\text{مکرر نامختوم مثبت و منفی (مانند: } ۰,۳۳۳۳۳\dots \text{ یا } \frac{1}{3} \text{ یا } -۰,۵۴۹۵۴۹۵۴۹\dots = \frac{-61}{111})$$

۴- مجموعه اعداد گنگ: اعدادی که گویا نباشند را اعداد گنگ می نامند و با Q' نمایش می دهند. این اعداد در واقع اعشاری های نامکرر
 نامختوم هستند. مثل:

$$\sqrt{3} = ۱,۷۳۲\dots \text{ یا عدد پی } \pi = ۳,۱۴۱۵۹\dots$$

۵- مجموعه اعداد حقیقی: به مجموع مجموعه های اعداد گویا و گنگ, مجموعه اعداد حقیقی گویند که با R نمایش می دهند. بنابراین:

$$R = Q \cup Q'$$

دستگاه اعداد حقیقی متشکل از مجموعه اعداد حقیقی و دو عمل جمع و ضرب می باشد. (تفریق, عمل جمعی است که یکی از اعداد آن
 منفی است و تقسیم, عمل ضربی است که یکی از اعداد آن معکوس است)

۶- مجموعه اعداد مختلط: مجموعه اعداد مختلط به شکل ذیل تعریف می گردد:

$$C = \{a+ib \mid a, b \in R, i=\sqrt{-1}\}$$

چون معادله $x^2 + 1 = 0$ در دستگاه اعداد حقیقی جواب ندارد, ناچار دستگاه دیگری ابداع شد که معادلاتی نظیر این معادله در آن
 جواب دارد که به آن دستگاه اعداد مختلط گویند که در آن:

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

$$\forall a > 0 \Rightarrow \sqrt{(-a)} = \sqrt{(-1)a} = \sqrt{i^2 a} = i\sqrt{a}$$

نکته : با توجه به تعاریف فوق ، رابطه ذیل بین مجموعه های اعداد ذکر شده همواره برقرار است :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

۳-۰ اعمال در مجموعه ها

تساوی = دو مجموعه A و B را مساوی می گویند و می نویسند $A=B$, اگر آنها عناصر یکسانی داشته باشند .
اجتماع = اجتماع دو مجموعه A و B یعنی مجموعه ی تمام عناصری که یا در A یا در B یا در هر دو وجود دارند و با نماد $A \cup B$ نشان می دهند.

اشتراک = اشتراک دو مجموعه A و B یعنی مجموعه ی تمام عناصری که هم در A و هم در B وجود دارند و با نماد $A \cap B$ نشان می دهند.

مجموعه تهی = مجموعه ای که شامل عنصری نباشد را مجموعه تهی می نامند و با علامت $\emptyset$ نمایش می دهند .

مثال ۱ : اگر A و B و C به شکل ذیل باشند , مجموعه های اشتراک و اجتماع آنها را بنویسید.

$$C = \{2, 10\} \quad B = \{1, 4, 9, 16\} \quad A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

توجه : اگر S زیر مجموعه T باشد , روابط ذیل همواره برقرار است :

$$S \cup T = T \quad \text{و} \quad S \cap T = S$$

توجه: تعداد زیر مجموعه های هر مجموعه که n عضو دارد برابر است با 2^n , که شامل خود مجموعه و مجموعه تهی نیز می باشد.

مثال ۲ : تمام زیر مجموعه های مجموعه A را بنویسید . $A = \{2, 4, 6\}$

مجموعه مرجع (جهانی یا عمومی) = در یک بحث معین , تمام عضوهای مجموعه های مورد مطالعه متعلق به مجموعه ای به نام مجموعه مرجع است و با M نشان می دهیم.

۵-۰ خواص اعمال در مجموعه اعداد حقیقی

الف) عمل جمع :

۱- بسته بودن مجموعه R :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a+b \in \mathbb{R}$$

۲- خاصیت جابه جایی :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a+b = b+a$$

۳- شرکت پذیری :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a+b) + c = a + (b+c)$$

۴- عنصر خنثی :

$$\forall a \in \mathbb{R} : a+0 = 0+a = a$$

۵- وجود عنصر قرینه :

$$\forall a \in \mathbb{R} : a+(-a) = -a+a = 0$$

۶- قرینه ی قرینه ی هر عدد حقیقی , مساوی با خود آن عدد است :

$$\forall a \in \mathbb{R} : -(-a) = a$$

۷-قرینه ی مجموع دو عدد حقیقی ، مساوی است با مجموع قرینه آنها :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : -(a+b) = -a+(-b)$$

۸- جمع علامت ها :

اگر دو عدد حقیقی هم علامت باشند با هم جمع شده , علامت مشترک را برای عدد بدست آمده در نظر می گیریم .

اگر دو عدد حقیقی مختلف علامت باشند , از هم کم شده , علامت عدد بزرگتر را برای حاصل تفریق در نظر می گیریم.

الف) عمل ضرب :

۱- بسته بودن مجموعه $\mathbb{R}$:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : ab \in \mathbb{R}$$

۲- خاصیت جابه جایی :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : ab = ba$$

۳- شرکت پذیری :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (ab)c = a(bc)$$

۴- عنصر خنثی :

$$\forall a \in \mathbb{R} : a \times 1 = 1 \times a = a$$

۵- وجود عنصر معکوس (یا وارون) :

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 : a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$$

۶- توزیع پذیری ضرب نسبت به عمل جمع :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{cases} a(b+c) = ab+ac \\ (a+b)c = ac+bc \end{cases}$$

۷- حاصل ضرب هر عدد حقیقی در صفر مساوی است با صفر :

$$\forall a \in \mathbb{R} : a \times 0 = 0 \times a = 0$$

۸- وارون وارون هر عدد حقیقی مساوی است با خود آن عدد :

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 : \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

۹- حاصل ضرب وارون های دو عدد مخالف صفر, مساوی است با وارون حاصل ضرب آنها:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0 : \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$$

۱۰- ضرب علامت ها :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{cases} a(-b) = -ab \\ (-a)b = -ab \\ (-a)(-b) = ab \end{cases}$$

فصل اول (توان و چند جمله ای ها)

۱-۱) توان و یک جمله ای

هر یک جمله ای از چهار جزء تشکیل شده است :

۱- اعداد (از مجموعه اعداد حقیقی) ۲- متغیرها (مثل x, y, z, Q, P و غیره)

۳- علائم (علامت های جمع، ضرب، منفی و تقسیم) ۴- توان (برای اعداد یا متغیرها یا هر دو)

مثلا $2x^{-5}$ یا $-1/3y^3x$ یا $\frac{11xz}{-33}$ یا $0.47Q$

تعریف یک جمله ای :

تعریف ۱. اگر a یک عدد حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آن گاه a^n را توان n ام a نامیده و به صورت $a^n = \overbrace{a \times \cdots \times a}^n$ تعریف می کنیم. a را پایه و n را توان یا نما نامیم.

تعریف ۲. ax^n یک جمله ای بر حسب x از درجه n است که در آن a یک عدد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی است. a را ضریب عددی و x را متغیر می نامیم.

ضرب و تقسیم اعداد توان دار

اگر a و b دو عدد حقیقی و m و n اعداد طبیعی باشند، آن گاه

پایه ها مساوی: در این حالت یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را جمع می کنیم!

یعنی $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

توان ها مساوی: در این حالت پایه ها را ضرب کرده و یکی از توان ها را می نویسیم!

یعنی $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

برای ضرب اعداد توان دار دو حالت داریم

پایه ها مساوی: در این حالت یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم!

یعنی $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ که $a \neq 0$

توان ها مساوی: در این حالت پایه ها را تقسیم کرده و یکی از توان ها را می نویسیم!

یعنی $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$ که $b \neq 0$

تقسیم اعداد توان دار نیز دو حالت داریم

نکات:

$$a^1 = a \quad (\text{آ})$$

$$a^0 = 1 \quad \text{که } a \neq 0 \quad (\text{ب})$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (\text{ج})$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{که } a \neq 0 \quad (\text{د})$$

تعریف ۳. یک جمله ای هایی که متغیرها و توان متناظر آن ها یکسان است، متشابه می نامیم؛ به عنوان مثال $2xy^2$ ، $\sqrt{5}xy^2$ و $7xy^2$ یک جمله ای های متشابه هستند.

اعمال جبری روی یک جمله‌ای‌ها

* جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها . یک جمله‌ای‌های متشابه را می‌توان با هم جمع یا از هم تفریق کرد.

$$\text{مثال ۴.} \quad 3xyz - 4xyz - xyz = -2xyz, \quad -7x^2 + x^2 = -6x^2$$

* ضرب یک جمله‌ای‌ها. برای ضرب یک جمله‌ای‌ها، ضرایب عددی را در هم ضرب کرده و متغیرها را نیز با توجه به قواعد ضرب اعداد توان‌دار ضرب می‌کنیم.

$$\text{مثال ۵.} \quad 3x^2y \cdot 5xy^2 = 15x^3y^3 \quad -2xy \cdot 7x^2z = -14x^3yz$$

$$(a^2)^4 \cdot a = a^{14} \cdot a = a^{15} \quad (b^4)^5 \cdot (b^3)^2 = b^{20} \cdot b^6 = b^{26}$$

تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای: در این نوع تقسیم ابتدا ضرایب عددی را ساده کرده و در مورد متغیرها از

قاعده زیر پیروی می‌کنیم. ($x \neq 0$)

$$\begin{cases} \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} & m > n \\ \frac{x^m}{x^n} = 1 & m = n \\ \frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}} & m < n \end{cases}$$

بیان ساده قاعده بالا به این ترتیب است که پایه‌ها را هر جا که توان متغیر بیشتر است (صورت یا مخرج) قرار داده، سپس توان‌ها را تفریق معمولی می‌کنیم.

به عنوان مثال برای انجام تقسیم $\frac{7x^2y^1}{x^1y^1}$ ابتدا ضرایب را ساده کرده، سپس بین x^2 و x^1 چون توان x^2 بیشتر است، x را در صورت نوشته و توان آن $2 - 1 = 1$ می‌شود؛ هم‌چنین بین y^1 و y^1 ، توان y^1 در مخرج بیشتر است، بنابراین y را در مخرج نوشته و توان آن برابر با $2 - 2 = 0$ خواهد شد؛ لذا حاصل این تقسیم $\frac{7x^1}{y^1}$ می‌شود.

$$\text{مثال ۶.} \quad \frac{7x^2yz^2}{xy^2z^2} = \frac{7x^1}{y^1} \quad \frac{-5abc^1}{14a^2b^2} = \frac{-5c^1}{14a^1b^2} \quad \frac{-5a^2b^2}{-14ab} = \frac{5a^1b^1}{14}$$

$$\frac{4x^2y^2}{-2xy^2z^2} = \frac{-2x^1}{yz^2} \quad \frac{x^1yz}{x^2yz^2} = \frac{1}{xz^1} \quad \frac{4ab^2c^1}{-14a^1bc} = \frac{-2b^1c}{7a}$$

۲-۱) چند جمله‌ای‌ها

تعریف چند جمله‌ای = چند جمله‌ای عبارتست از مجموع چند یک جمله‌ای غیرمتشابه .

هر جمله بوسیله ی علامت جمع یعنی + یا علامت تفریق یعنی - از جمله ی دیگر متمایز می گردد .

مثلاً $3x + 2$, یک دو جمله‌ای است که $3x$ یک جمله و 2 جمله ی دوم آن است که بوسیله ی علامت جمع از هم تفکیک شده اند. یا

$-10 - 5y + \frac{x}{3}$ یک سه جمله ای است که جملات آن عبارتند از : " $-5y$ " و " $\frac{x}{3} +$ " و " -10 ".

متغیر ها دارای توان ۱، ۲ یا بالاتر هستند، اما توان ۱ نوشته نمی شود. مثلاً در مثال فوق، توان x ، ۱ و توان y نیز ۱ می باشد.

*تمرین : عبارت $2x^5 - 1/3y^3x + \frac{11xz}{-33} - 0.47Q$ چند جمله ای است؟ چه متغیرهایی دارد؟ توان متغیرهای هر جمله چند است؟

نکته ۱: عبارت ضرب در چند جمله ای ها اغلب نوشته نمی شود. این زمانی است که یک متغیر در عدد یا متغیر دیگری ضرب شده باشد. مثلاً به جای $x \times y$ نوشته می شود xy یا به جای $x \times 5$ نوشته می شود $5x$.

نکته ۲: به عددی که در متغیر ضرب می شود، ضریب آن متغیر گفته می شود. مثلاً در جمله $5x$ ، ۵ ضریب x است یا در جمله $-1/3y^3x$ ، منفی یک سوم ($-1/3$) هم ضریب x و هم ضریب y^3 می باشد.

نکته ۳: در چند جمله ای ها، معمولاً تقسیم به صورت کسر نمایش داده می شود. مثلاً به جای $x \div 2$ می نویسیم $\frac{1}{2}x$ یا $\frac{x}{2}$.

نکته ۴: چون حاصل ضرب هر عدد در ۱ خود همان عدد می شود، ضریب ۱ متغیرها نوشته نمی شود. پس اگر در جمله ای عددی در متغیر ضرب نشده بود، ضریب متغیر ۱ می باشد.

نکته ۵: هر عدد یا متغیری که در یک کسر ضرب شود، تنها در صورت کسر ضرب می شود نه مخرج آن.

نکته ۶: یک چند جمله ای می تواند دارای ۱، ۲ یا بیشتر، متغیر باشد. مثلاً عبارت تمرین ۳ یک چهارجمله ای ۴ متغیره، دارای ۴ متغیر x, y, z, Q می باشد. اما عبارت $-7 + 5x + 25x^4$ یک سه جمله ای یک متغیره است که تنها دارای یک متغیر x است.

نکته ۷: به بزرگترین توان متغیر در هر چند جمله ای، درجه ی آن چند جمله ای بر حسب آن متغیر می گویند. مثلاً سه جمله ای $-7 + 5x + 25x^4$ ، یک سه جمله ای درجه ۴ بر حسب x است و عبارت $1/2y^3x - 7x^5$ ، یک دو جمله ای درجه ۵ بر حسب x و یک دو جمله ای درجه ۳ بر حسب y است.

ترتیب اعمال ۴ عمل اصلی

برای حل یک عبارت محاسباتی باید این ترتیب رعایت شود: پرانتز، توان، ضرب و تقسیم، جمع و تفریق

مثال : $5 = 7 + 2(-1) = 2 + 7 = 2(1 - 2) + 7$. یعنی ابتدا داخل پرانتز محاسبه می شود یعنی ۲ از ۱ کم میشود که جواب منفی یک است، سپس توان اعمال می گردد یعنی منفی یک به توان ۳ می رسد که همان منفی یک می شود، بعد عمل ضرب موجود انجام می گیرد یعنی ۲ در منفی یک ضرب می شود که جواب منفی ۲ است، آنگاه عمل جمع صورت می پذیرد، یعنی منفی ۲ با ۷ جمع می شود که حاصل عدد ۵ است.

مثال : $35 = 36 - 1 = 1 - (1 + 5)$

در این ترتیب اعمال ضرب و تقسیم بر هم تقدم یا تأخر ندارند و در یک رتبه برای محاسبه قرار دارند، همینطور برای جمع و تفریق. برای همین اگر به عبارتی برخوردیم که ضرب و تقسیم هر دو وجود داشت و تقدم با پرانتز مشخص نشده بود، برای محاسبه از چپ به راست عمل می کنیم؛ به عبارت دیگر تقدم در این حالت با عمل سمت چپ است.

برای روشن تر شدن این مطلب به مثال های ذیل توجه کنید :

مثال : حاصل عبارت $2 \times 5 \div 15$ را بدست آورید.

حل با رعایت حق تقدم های ذکر شده (یعنی اول تقسیم که سمت چپ قرار دارد و بعد ضرب) عبارت است از : $2 \times 5 \div 15 = 6$

اما اگر این حق تقدم رعایت نگردد (یعنی اول ضرب را انجام دهیم، آنگاه تقسیم)، پاسخ غلط حاصل می شود : $15 \div 10 = 1/5$

مثال : روش صحیح محاسبه $140 = 14 \times 10 = 28 \div 2 \times 10 = 28 \times 5 = 140$

روش غلط محاسبه $1/4 = 20 \div 2 = 28 \div 10 \times 2 = 5.6$

تعریف ۷. مجموع چند یک جمله‌ای غیر متشابه را، چند جمله‌ای گوئیم؛ به عنوان مثال $x^2 - 2x$ یک دو جمله‌ای و $1 + 2a^5 - 7b^2a$ یک سه جمله‌ای است.

اعمال جبری روی چندجمله‌ای‌ها

* برای جمع و تفریق چندجمله‌ای‌ها، جملات متشابه را جدا و با هم ساده می‌کنیم.

$$\text{مثال ۸. } 7x^2 + 2x - 4x - x^2 + 3x = (7x^2 - x^2) + (2x - 4x + 3x) = 6x^2 + x$$

$$3xy^2 + 3xy - 5xy^2 + 2xy = (3xy^2 - 5xy^2) + (3xy + 2xy) = -2xy^2 + 5xy$$

* برای ضرب چند جمله‌ای‌ها دو حالت اتفاق می‌افتد؛ ضرب یک جمله‌ای در چندجمله‌ای و ضرب چندجمله‌ای در چندجمله‌ای. می‌دانیم که برای هر سه عدد a ، b و c رابطه $a(b + c) = ab + ac$ همواره برقرار است. در ضرب یک جمله‌ای در چندجمله‌ای نیز دقیقاً همین خاصیت به کار می‌رود؛ یعنی یک جمله‌ای در تک تک جملات چندجمله‌ای ضرب می‌شود.

$$\text{مثال ۹. } 3x^2(2x^2 - x + 5) = 6x^4 - 3x^3 + 15x^2$$

$$-2xy(x^2y + 2x - 3y^2) = -2x^3y^2 - 4x^2y + 6xy^3$$

خاصیت دیگری که برای اعداد a ، b ، c و d داریم، رابطه $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ است که برای ضرب چندجمله‌ای در چندجمله‌ای‌ها نیز به کار می‌رود؛ در این روش هر کدام از جملات پراتز اول در تک تک جملات پراتز دوم ضرب می‌شود. باید توجه داشت که پس از ضرب عبارات، چنانچه جملات مشابهی به دست آید، باید ساده شوند.

$$\text{مثال ۱۰. } (x^2 - 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$(3x - 7)(x^2 - 2x - 5) = 3x^3 - 6x^2 - 15x - 7x^2 + 14x + 35 = 3x^3 - 13x^2 - x + 35$$

$$\begin{aligned} (4xy - 2x^2 - 1)(x^2y - 3y) &= 4x^3y^2 - 2 \cdot 1xy^2 - 2x^2y + 3x^2y - x^2y + 3y \\ &= 4x^3y^2 - 2 \cdot 1xy^2 - 2x^2y + 5x^2y + 3y \end{aligned}$$

* در تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر یک جمله‌ای نیز از قاعده تفکیک برای اعداد به صورت $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ استفاده می‌شود.

$$\text{مثال ۱۱. } \frac{a^5 - 2a^3 + a}{a} = a^4 - 2a^2 + 1$$

$$\frac{8a^5b^7 - 4a^3b^7 + 2ab^5}{2ab^7} = -2a^2b + 2a - b^2$$

$$\frac{18x^4y^2z^3 + 2x^5y^3z^2 - 7x^3yz^4 - 3xyz^4}{3xyz^4} = 6x^3y + x^4y^3z - 3xz^5 - 1$$

$$\frac{3x^5y^2 - 4xy^2 + x^2y^2 - 5x}{3x^2y} = \frac{1}{3}x^3y - \frac{4y}{3} + \frac{1}{3}xy - \frac{5}{3xy}$$

۱.۲ اتحادهای پر کاربرد

اتحادهای جبری روابطی هستند که همواره درست بوده و کاربرد آنها انجام محاسبات ریاضی را سرعت می دهد؛
مهمترین این اتحادها را در زیر می بینید.

(۱) اتحاد مربع دو جمله ای

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(۲) اتحاد مزدوج

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

(۳) اتحاد جمله مشترک

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

(۴) اتحاد مربع سه جمله ای

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

(۵) اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

(۶) اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دو جمله

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مثال از اتحاد (۱).

$$(x + 2)^2 = x^2 + 2(x)(2) + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$(x - 5)^2 = x^2 - 2(x)(5) + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$(2x - y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(y) + y^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$$

$$(5a + 3b)^2 = (5a)^2 + 2(5a)(3b) + (3b)^2 = 25a^2 + 30ab + 9b^2$$

مثال از اتحاد (۲).

$$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$$

$$(x + 3y)(x - 3y) = x^2 - (3y)^2 = x^2 - 9y^2$$

$$(2a - 3b)(2a + 3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$$

$$(a^2 + 4b^2)(a^2 - 4b^2) = (a^2)^2 - (4b^2)^2 = a^4 - 16b^4$$

مثال از اتحاد (۳).

$$\begin{aligned}(x+2)(x+2) &= x^2 + (2+2)x + (2)(2) = x^2 + 4x + 4 \\(a-1)(a+2) &= a^2 + (-1+2)a + (-1)(2) = a^2 + a - 2 \\(x-4)(x-4) &= x^2 + (-4-4)x + (-4)(-4) = x^2 - 8x + 16 \\(3a-1)(3a+4) &= (3a)^2 + (-1+4)(3a) + (-1)(4) = 9a^2 + 9a - 4\end{aligned}$$

مثال از اتحاد (۴).

$$\begin{aligned}(x+y-1)^2 &= x^2 + y^2 + 1^2 + 2(x)(y) + 2(y)(-1) + 2(x)(-1) = x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2y - 2x \\(2x-y-3z)^2 &= (2x)^2 + (-y)^2 + (-3z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(-3z) + 2(2x)(-3z) \\&= 4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 6yz - 12xz\end{aligned}$$

مثال از اتحاد (۵).

$$\begin{aligned}(x+1)(x^2-x+1) &= x^3 + 1^3 = x^3 + 1 \\(a-2)(a^2+2a+4) &= a^3 - 2^3 = a^3 - 8 \\(2y-3x)(4y^2+6xy+9x^2) &= (2y)^3 - (3x)^3 = 8y^3 - 27x^3 \\(\Delta a+b)(2\Delta a^2-\Delta ab+b^2) &= (\Delta a)^3 + b^3 = 12\Delta a^2 + b^3\end{aligned}$$

مثال از اتحاد (۶).

$$\begin{aligned}(x+1)^3 &= x^3 + 3(x^2)(1) + 3(x)(1^2) + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\(y-2)^3 &= y^3 - 3(y^2)(2) + 3(y)(2^2) - 2^3 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\(3x+y)^3 &= (3x)^3 + 3(3x)^2(y) + 3(3x)(y)^2 + y^3 = 27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3 \\(2x-\Delta y)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(\Delta y) + 3(2x)(\Delta y)^2 - (\Delta y)^3 = 8x^3 - 6x^2\Delta y + 12x\Delta y^2 - \Delta y^3\end{aligned}$$

۲.۲ تجزیه با استفاده از اتحادها

تجزیه یکی از ابزار بسیار سودمند در ریاضیات عمومی است. در بخش قبل با چند اتحاد جبری آشنا شدیم؛ حال به بیان چگونگی تجزیه با برخی از این اتحادهای پرکاربرد می‌پردازیم.

• تجزیه با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای. به مشخصه‌های اتحاد $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ در سمت راست دقت کنید. ۱. سه جمله دارد که دو جمله آن مربع کامل بوده و همیشه مثبت هستند، ۲. جمله وسط دو برابر جذر دو جمله دیگر است و علامت آن همان علامت بین جملات درون پرانتز است. عبارت معادل با این جملات در سمت چپ، یک پرانتز با توان ۲ است که داخل آن جذر دو جمله مربع قرار دارد و علامت بین جملات درون پرانتز همان‌طور که گفته شد، با علامت $2ab$ یکی است.

به این مثال توجه کنید؛ $x^2 + 8x + 16$. این عبارت دارای سه جمله است که x^2 و 4^2 مربع کامل هستند؛ جذر این دو جمله یعنی x و 4 ضرب در ۲ برابر $8x$ می‌شود که همان جمله وسط است. لذا تجزیه این عبارت به صورت $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ خواهد بود.

$$\text{مثال ۱.} \quad x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \qquad a^2 + 10a + 25 = (a + 5)^2$$

$$9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2 \qquad 16a^2 + 8a^2b^2 + b^4 = (4a^2 + b^2)^2$$

• تجزیه با استفاده از اتحاد مزدوج. مشخصه‌های اتحاد $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ در سمت راست به این ترتیب است؛ ۱. دو جمله مربع کامل دارد، ۲. بین این دو جمله همیشه علامت منها قرار دارد. به عبارت معادل با این جملات در سمت چپ توجه کنید؛ دو پرانتز که درون هر دو جذر جملات سمت راست قرار گرفته و علامت بین جملات در یکی از پرانتزها منها و در دیگری به علاوه است.

به این مثال توجه کنید؛ $x^2 - 25$. در این عبارت دو جمله مربع کامل، یعنی x^2 و 5^2 داریم که بین آنها علامت منها قرار دارد. بنا به توضیحات بالا، با تجزیه از اتحاد مزدوج دو پرانتز خواهیم داشت که جذر جملات بالا، یعنی x و 5 با علامت منها و به علاوه بین جملات مذکور، درون پرانتزها قرار می‌گیرد. لذا تجزیه عبارت داده شده به صورت، $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$ است.

$$\text{مثال ۲.} \quad 4x^2 - y^2 = (2x^2 + y)(2x^2 - y), \quad a^2 - 81 = (a^2 + 9)(a^2 - 9), \quad x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1),$$

$$16x^2 - 64y^2 = (4x - 8y^2)(4x + 8y^2), \quad 9x^2 - 49 = (3x + 7)(3x - 7), \quad a^3 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1),$$

• تجزیه با استفاده از اتحاد جمله مشترک. مشخصه‌های اتحاد $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ در سمت راست عبارت است از ۱. یکی از جملات مربع کامل است، ۲. ضریب x مجموع دو مقدار a و b است که حاصل ضرب آن‌ها جمله سوم یعنی ab را تشکیل می‌دهد. حال به عبارت معادل با این سه جمله‌ای در سمت چپ نگاه کنید؛ دو پراتز که درون هر دو جذر جمله مربع در سمت راست و نیز a و b که دارای مشخصه‌های مذکور باشند، قرار گرفته است.

به این مثال دقت کنید؛ $x^2 - 5x + 6$. این عبارت متشکل از سه جمله بوده و یکی از جملات یعنی x^2 مربع کامل است. باید دو عدد پیدا کنیم که مجموع آن‌ها -5 یعنی ضریب x و ضرب آن‌ها $+6$ باشد؛ به سادگی می‌بینید که -2 و -3 اعداد موردنظر ما هستند. لذا تجزیه عبارت داده شده به صورت $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ است.

$$\text{مثال ۳.} \quad x^2 + 2x^2 - 63 = (x^2 + 9)(x^2 - 7), \quad a^2 + 7a + 6 = (a+6)(a+1),$$

$$x^2 - x - 30 = (x-6)(x+5), \quad a^2 + a^2 - 72 = (a^2 + 9)(a^2 - 8),$$

$$4x^2 - 10x + 4 = (2x-1)(2x-4), \quad a^2 - 7a + 12 = (a-3)(a-4)$$

• تجزیه با استفاده از اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله. با دقت به سمت راست اتحاد

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

بین این جملات علامت منها یا به علاوه قرار دارد. حال به عبارت معادل با این جملات در سمت چپ دقت کنید؛ دو پراتز که درون اولی ریشه سوم دو جمله مکعب سمت راست قرار دارد و علامت بین آن‌ها نیز همان علامت بین جملات در سمت راست است. پراتز دوم با توجه به پراتز اول ساخته می‌شود؛ به این ترتیب که مربع جملات درون اولین پراتز با علامت مثبت و حاصل ضرب جملات آن با علامت مخالف، سه جمله این پراتز را تشکیل می‌دهد.

حال به این مثال توجه کنید؛ $x^3 - 8$. عبارتی با دو جمله که x^3 و 2^3 مکعب هستند، داریم. تجزیه این دو جمله به صورت دو پراتز است که در پراتز اول ریشه سوم مکعبات، یعنی x و 2 با علامت منها بین آن‌ها و درون پراتز دوم با توجه به آن‌چه در بالا گفته شد، $x^2 + 2x + 4$ خواهیم داشت. لذا $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

$$\text{مثال ۴.} \quad a^3 - 27 = (a-3)(a^2 + 3a + 9), \quad x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$8a^3 - 125 = (2a-5)(4a^2 + 10a + 25), \quad x^3 + 64y^3 = (x+4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$$

۳.۲ ب.م.ب یک جمله‌ای‌ها

به یاد دارید که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.ب) اعداد به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول مشترک با کمترین توان تعریف می‌شود؛ این قاعده برای یک جمله‌ای‌ها نیز برقرار است. به عنوان مثال، برای به دست آوردن ب.م.ب دو یک جمله‌ای $10xz^3$ و $2x^2y^3$ ابتدا بین ضرایب عددی ۱۰ و ۲ ب.م.ب می‌گیریم که برابر ۲ می‌شود؛ سپس بین متغیرها، متغیر مشترک با کمترین توان را در نظر می‌گیریم که x^1 است. در نتیجه، ب.م.ب یک جمله‌ای‌های داده شده $2x$ خواهد بود.

$16a^2bc^3, 8abc^5$	$\Rightarrow$	ب.م.ب = $8abc^3$	مثال ۵.
$2x^5yz, 2x^4$	$\Rightarrow$	ب.م.ب = $2x^4$	
$15xyz, 7x^3$	$\Rightarrow$	ب.م.ب = x	
$3a^2b, 4xy^3$	$\Rightarrow$	ب.م.ب = 1	

۴.۲ فاکتورگیری

یکی از روش‌های بسیار پرکاربرد در تجزیه چندجمله‌ای‌ها، فاکتورگیری است. در این روش، ابتدا بین جملات ب.م.م گرفته و آن را عامل فاکتور می‌نامیم؛ در صورتی که این عامل ۱ نباشد، تک‌تک جملات را بر این عامل تقسیم می‌کنیم. با ضریب قرار دادن عامل فاکتور برای حاصل این تقسیم، فاکتورگیری کامل می‌شود.

به عنوان مثال، برای تجزیه عبارت $3x^5 - 2x^2 + 7x$ ابتدا ب.م.م $3x^5$ ، $2x^2$ و $7x$ را به دست می‌آوریم که برابر x است؛ سپس تک‌تک جملات را بر این عامل تقسیم می‌کنیم که در نتیجه عبارت $3x^4 - 2x + 7$ حاصل خواهد شد. لذا تجزیه عبارت داده شده با استفاده از فاکتورگیری به شکل $3x^5 - 2x^2 + 7x = x(3x^4 - 2x + 7)$ است.

نکته. در تجزیه چندجمله‌ای‌ها، ابتدا در صورت امکان فاکتور گرفته، سپس چنانچه عبارت به دست آمده درون پرانتز با استفاده از اتحادهای جبری قابل تجزیه باشد، آن را نیز تجزیه می‌کنیم.

$$3x^4 - 3x^2 + 3x^2 = 3x^2(x^2 - 2x + 1) = 3x^2(x - 1)^2 \quad \text{مثال ۶.}$$

$$2x^5 - 32x = 2x(x^4 - 16) = 2x(x^2 - 4)(x^2 + 4)$$

$$x^3 - x^2 - 3x = x(x^2 - x - 3) = x(x - 3)(x + 2)$$

$$28x^2 - 32x = 4x(4x^2 - 8) = 4x(2x - 2)(2x + 2)$$

$$4x^4 - 32x = 4x(x^3 - 8) = 4x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^5 + 10x^3 + 25x = x^3(x^2 + 10x + 25) = x^3(x + 5)^2$$

$$3x^3 + 3x^2 = 3x^2(x^2 + 1) = 3x^2(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

مثال ۷. کسرهای زیر را تجزیه کرده، سپس تا حد امکان ساده کنید.

$$(i) \frac{x^2 - 7x + 5}{x^2 - 1} \quad (ii) \frac{x^3 - 9}{x^2 + 7x + 9} \quad (iii) \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 - 5x + 4} \quad (iv) \frac{x^5 + x^3 - 2x^2}{x^2 - x} \quad (v) \frac{x^2 - 7x}{x - 8} \quad (vi) \frac{3x^3 - 8x^2 + 8x^2}{x^2 - 2x^2}$$

۱.۳ نکات اصلی در حل معادلات و نامعادلات

تعریف ۱. معادله یک مجهولی، یک تساوی با یک متغیر است و مقادیری از دامنه که به ازای آن‌ها تساوی برقرار باشد، جواب یا ریشه‌های معادله گفته می‌شوند. به عنوان مثال، $3x + 2 = 5x - 1$ و $-7x^2 + 3x - 4 = 0$ معادلات یک مجهولی از درجه یک و دو هستند. همچنین نامساوی‌های دارای متغیر را نامعادله گوییم؛ $4x < 2x + 6$ و $1 < 8x - 1 \leq 5$ دو نامعادله هستند. مجموعه مقادیری که نامعادله به ازای آن‌ها درست باشد، جواب نامعادله است.

به نکات کلی زیر که از اهمیت و کاربرد فراوانی در حل معادلات و نامعادلات برخوردار هستند، توجه کنید.

(i) اگر به دو طرف یک معادله عبارتی جبری را اضافه یا از دو طرف آن عبارتی جبری را کم کنیم، جواب‌های معادله تغییری نمی‌کند. همچنین اگر دو طرف یک معادله را در عددی غیر صفر ضرب یا بر عددی غیر صفر تقسیم کنیم، تغییری در جواب‌ها حاصل نمی‌شود.

(ii) اگر از دو طرف یک نامعادله عددی را کم یا به دو طرف عددی را اضافه کنیم، مجموعه جواب نامعادله تغییری نمی‌کند.

(iii) اگر دو طرف یک نامعادله را در عددی مثبت و غیر صفر ضرب یا بر آن تقسیم کنیم، جهت نامعادله و مجموعه جواب آن تغییری نمی‌کند. ولی اگر دو طرف یک نامعادله را در عددی منفی و غیر صفر ضرب یا بر آن تقسیم کنیم، جهت نامعادله عوض می‌شود.

(v) در معادلات و نامعادلات می‌توان جملات مساوی را از دو طرف حذف نمود. همچنین اگر جمله‌ای را از یک طرف به طرف دیگر منتقل کنیم، علامت آن جمله عوض می‌شود.

در این بخش ابتدا به حل معادلات و نامعادلات یک مجهولی درجه اول می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا دو طرف تساوی یا نامساوی را ساده کرده، سپس جملات مشابه را با تغییر علامت به یک طرف تساوی برده و با استفاده از نکات گفته شده در بالا، معادله یا نامعادله را حل می‌کنیم.

مثال ۲. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$a) x + 1 = 3x - 1, \quad b) -2x - 1 = 4x + 6, \quad c) 5x - 2 = 0, \quad d) 9x - 3 = x$$

$$e) 8x = 2x, \quad f) 7x \geq 14, \quad g) -3x - 1 < 4x + 3, \quad h) -9x + 2 \geq 4x$$

$$i) 2x - 7 < 4x, \quad j) 8 - x < 11, \quad k) 6x < 8x - 2, \quad l) -9 < 3x < -6$$

$$m) 1 < -7x < 8, \quad n) 4 < x - 2 \leq 5, \quad o) -8 \leq x + 1 < -7, \quad p) 5 < 2x - 5 < 9$$

$$q) -1 < -x < 3, \quad r) 7 < -x - 1 < 11, \quad s) -4 < 6x + 5 < -1, \quad t) 0 < -7x + 2 \leq 2$$

مثال ۳. اگر $-1 < x < 5$ باشد، آن گاه $-7x + 3$ ، $x - 6$ ، $-4x$ ، $5x$ ، $8x - 2$ و $2x + 9$ هر یک در چه بازه‌ای قرار می‌گیرند.

۲.۳ حل معادلات درجه اول و دوم

• ریشه معادلات درجه اول. با به کار بردن آنچه در بخش قبل گفته شد، جواب معادلات درجه اول را به راحتی محاسبه کردیم. مقادیری از x که با صفر قرار دادن یک عبارت به دست می‌آید، ریشه معادله گفته می‌شود. تنها ریشه دو جمله‌ای درجه اول $p_1 = ax + b$ به صورت $x = -\frac{b}{a}$ است.

مثال ۴. ریشه عبارات زیر را به دست آورید.

$$i) p_1 = -5x \quad ii) p_1 = 5x + 20 \quad iii) p_1 = -x - 6 \quad iv) p_1 = x + 11$$

• ریشه معادلات درجه دوم به روش دلتا. این روش ابزاری مفید و پرکاربرد برای محاسبه ریشه سه جمله‌ای درجه دوم $p_2 = ax^2 + bx + c$ است. در p_2 مقدار $b^2 - 4ac$ را مبین معادله نامیده و با نماد Δ (دلتا) نشان می‌دهیم. علامت دلتا تعداد ریشه‌های معادله درجه دوم را برای ما معین می‌کند.

(i) اگر $\Delta \geq 0$ باشد، p_2 دو ریشه x_1 و x_2 دارد که به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(ii) اگر $\Delta = 0$ باشد، p_2 یک ریشه مضاعف $x = -\frac{b}{2a}$ دارد؛ در واقع در این حالت $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ است.

(iii) اگر $\Delta < 0$ باشد، p_2 ریشه ندارد.

لذا برای به دست آوردن ریشه‌های یک معادله درجه دو ابتدا a ، b و c را مشخص کرده، سپس Δ را محاسبه و با توجه به علامت آن، ریشه‌ها را در صورت وجود با توجه به موارد بالا به دست می‌آوریم. توجه کنید که معادلات درجه دوم حداکثر دو ریشه دارند.

مثال ۵. ریشه عبارات زیر را به دست آورید.

$$۱) y = 3x^2 - 5x - 1$$

$$۲) y = -2x^2 + x - 3$$

$$۳) y = -x^2 - 4$$

$$۴) y = x^2 - 6x + 9$$

$$۵) y = 5x^2$$

$$۶) y = 4x^2 + 10x + 6$$

۳.۳ حل معادلات با استفاده از تجزیه

با به کار بردن روشهای تجزیه می‌توان ریشه برخی معادلات را به آسانی محاسبه کرد؛ یعنی ابتدا معادله را تجزیه کرده تا به صورت حاصل ضرب چند جمله‌ای‌ها دربیاید، سپس با استفاده از نکات زیر ریشه‌ها را به دست می‌آوریم.

نکات .

(i) اگر $a.b = 0$ که $a, b \in \mathbb{R}$ ، آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$.

(ii) اگر $x^2 = a$ که $a \in \mathbb{R}$ و $a \geq 0$ باشد، آنگاه $x = \pm\sqrt{a}$. اگر $a < 0$ باشد، معادله جواب ندارد.

(iii) اگر $ax^n = 0$ که $a \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه $x = 0$.

(iv) اگر $ax^2 + c = 0$ و $ac \geq 0$ ، این معادله ریشه ندارد و اگر $ac < 0$ معادله دارای دو ریشه $\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ است.

مثال ۶. ریشه عبارات زیر را به دست آورید.

$$۱) y = x(x + 3)$$

$$۲) y = -2x(3x - 6)$$

$$۳) y = 5x(x - 7)(4x + 8)$$

$$۴) y = 6x^2$$

$$۵) y = -7x^2 + 14$$

$$۶) y = (x + 2)(2x + 10)(3x - 1)$$

$$۷) y = (2x - 4)(x^2 + 4)$$

$$۸) y = -x^2(x^2 - 1)(3x^2 - 12)$$

مثال ۷. ریشه عبارات زیر را با استفاده از تجزیه به دست آورید.

$$۱) y = x^2 - x$$

$$۲) y = -2x^2 + 2x^2 + 12x$$

$$۳) y = x^4 - 6x^2 + 9x^2$$

$$۴) y = x^2 + 12x + 35$$

$$۵) y = x^2 - 125$$

$$۶) y = -7x^6 + 28x^2$$

۱.۴ رابطه و حاصل ضرب دکارتی

در صفحه هر نقطه با یک مختصات و هر مختصات با یک نقطه نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱. به زوج‌هایی مانند (x_0, y_0) در صفحه که ترتیب در نوشتن آن‌ها مهم است، زوج مرتب گوئیم.

مثال ۲. با استفاده از مجموعه $A = \{۲, ۵, ۷, ۹\}$ (الف) همه زوج‌هایی که طول و عرض آن‌ها مساوی است، (ب) همه زوج‌هایی که عرض آن‌ها دو واحد از طولشان کمتر است، بنویسید.

حل. (الف) $\{(۲, ۲), (۵, ۵), (۷, ۷), (۹, ۹)\}$ (ب) $\{(۲, ۵), (۹, ۷)\}$

(*) مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، رابطه نامیده می‌شود. در مثال قبل، هر دو مجموعه (الف) و (ب) رابطه هستند.

تعریف ۳. حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه A و B را با $A \times B$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

مثال ۴. اگر $M = \{۲, ۶\}$ و $K = \{۴, ۸, ۲\}$ باشد، حاصل ضرب دکارتی $M \times K$ و $K \times M$ را به دست آورید.

حل. $M \times K = \{(۲, ۴), (۶, ۴), (۲, ۸), (۶, ۸), (۲, ۲), (۶, ۲)\}$

$$K \times M = \{(۴, ۲), (۴, ۶), (۸, ۲), (۸, ۶), (۲, ۲), (۲, ۶)\}$$

تعریف ۵. به هر زیرمجموعه از یک حاصل ضرب دکارتی، رابطه گفته می‌شود. به عنوان نمونه،

$\mathcal{R} = \{(۲, ۴), (۲, ۲), (۶, ۲)\} \subseteq M \times K$ در مثال بالا یک رابطه است. همان طور که می‌بینید این تعریف از رابطه با

تعریف (*) یکی است.

مثال ۶. با توجه به $K \times M$ در مثال قبل، رابطه‌ای که در آن مختص‌های اول از مختص‌های دوم بیشتر است،

بنویسید. حل. $\mathcal{R} = \{(۴, ۲), (۸, ۲), (۸, ۶)\}$

۲.۴ مفهوم تابع

تعریف ۷. تابع رابطه‌ای است که در آن هیچ دو زوج متمایزی دارای مختص‌های اول برابر نباشند؛ به عبارت دیگر، اگر دو زوج دارای مختص‌های اول مساوی بودند، آنگاه مختص‌های دوم نیز برابر باشد. در تابع، مجموعه مختص‌های اول را دامنه (D_f) و مجموعه مختص‌های دوم را برد (R_f) می‌نامیم.

مثال ۸. رابطه $\{(2, 4), (6, 8)\} \subseteq M \times K$ یک تابع است که $\{2, 6\}$ دامنه و $\{4, 8\}$ برد آن است. ولی رابطه $\{(6, 4), (6, 8), (2, 2)\} \subseteq M \times K$ تابع نیست، زیرا زوج‌های $(6, 4)$ و $(6, 8)$ دارای مختص‌های اول برابر و مختص‌های دوم نابرابر هستند.

نکته. زیرمجموعه $\{(2, 4), (6, 8)\}$ از $M \times K$ در مثال ۸ یک تابع است که در آن مختص‌های دوم از مختص‌های اول دو واحد بیشتر است. این تابع را می‌توانیم به صورت $\{(x, y) \mid y = x + 2\}$ و یا $\{(x, x + 2) \mid x \in \{2, 6\}\}$ نیز نمایش دهیم.

تعریف ۹. ضابطه تابع f قاعده‌ای است که به هر عضو از مجموعه دامنه، عضو منحصر به فردی به نام $f(x)$ از مجموعه برد را نسبت می‌دهد. ضابطه را به صورت $y = f(x)$ و یا به صورت $f : A \rightarrow B$ نمایش می‌دهیم که در آن $x \mapsto f(x)$ نمایش دوم، مجموعه A دامنه تابع f و مجموعه B برد آن یا مجموعه‌ای است که برد را شامل می‌شود.

مثال ۱۰. رابطه $y = 3x$ ضابطه یک تابع است. این تابع را می‌توان به صورت $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ نمایش داد که در آن $x \mapsto 3x$

آن $\mathbb{R}$ دامنه و برد تابع f است. در تابع $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ مجموعه $\mathbb{R}^{\geq 0}$ هم دامنه و هم برد g است. همچنین $x \mapsto \sqrt{x}$

این تابع را می‌توان به صورت $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ نیز نمایش داد که در این نمایش $R_g \subseteq \mathbb{R}$ و $x \mapsto \sqrt{x}$

مثال ۱۱. اگر $f(x) = 2x - 7$ و $g(x) = x^2 + 1$ باشد، آنگاه $f(0)$ ، $f(-1)$ ، $g(-2)$ و $g(2)$ را به دست آورید.

۳.۴ تعیین دامنه توابع

در این بخش چگونگی یافتن دامنه توابع چندجمله‌ای، گویا و رادیکالی را که کاربرد بیشتری دارند، بیان می‌کنیم.

(I) در تابع چندجمله‌ای درجه n به صورت $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن $a_n \neq 0$ است، دامنه همواره $\mathbb{R}$ می‌باشد.

(II) دامنه توابع گویا $\frac{p(x)}{q(x)}$ که $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x هستند، به صورت $\mathbb{R} - \{x \mid q(x) = 0\}$ یا به عبارت دیگر $\mathbb{R} - \{\text{ریشه مخرج}\}$ است.

(III) دامنه توابع رادیکالی مجموعه‌ای است که به ازای آن عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

مثال ۱۲. دامنه توابع زیر را به دست آورید.

$$f_1(x) = -x - 1 \quad \Rightarrow \quad D_{f_1} = \mathbb{R}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad D_{f_2} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f_3(x) = \frac{x^2+1}{x-5} \quad \Rightarrow \quad D_{f_3} = \mathbb{R} - \{5\}$$

$$f_4(x) = \sqrt{x-2} \quad \Rightarrow \quad D_{f_4} = \{x \mid x \geq 2\} = [2, +\infty]$$

$$f_5(x) = x^5 - 2x^2 + x - 1 \quad \Rightarrow \quad D_{f_5} = \mathbb{R}$$

$$f_6(x) = \frac{x^2-9}{x+3} \quad \Rightarrow \quad D_{f_6} = \mathbb{R} - \{-3\}$$

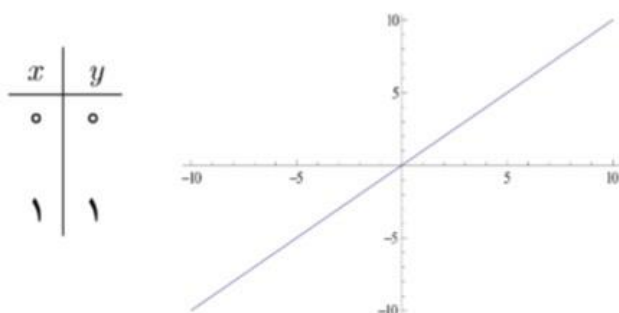
$$f_7(x) = \sqrt{4x-1} \quad \Rightarrow \quad D_{f_7} = \{x \mid x \geq \frac{1}{4}\} = [\frac{1}{4}, \infty]$$

۱.۵ رسم نمودار توابع درجه اول $y = ax + b$

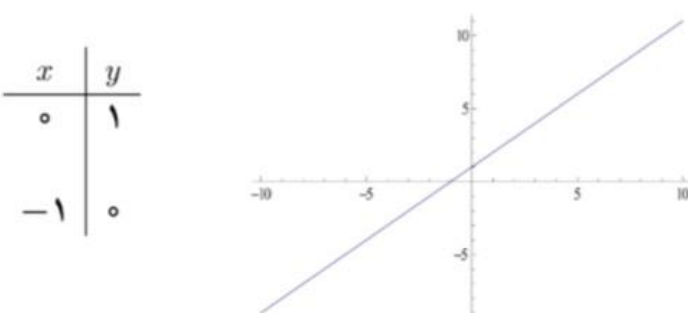
نمودار این توابع به شکل خط راست است؛ لذا برای رسم آن تنها یافتن دو نقطه از نمودار کافی است. در تابع درجه اول، a شیب خط، b عرض از مبدأ و $-\frac{b}{a}$ طول از مبدأ خط نامیده می‌شود. اگر $a > 0$ باشد، تابع صعودی و نمودار خط راست به صورت  و اگر $a < 0$ باشد، تابع نزولی و نمودار خط به صورت  خواهد بود.

مثال ۱. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = x$$



$$f(x) = x + 1$$



۲.۵ رسم نمودار توابع درجه دوم (سه‌می)

نمودار توابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ به شکل سه‌می است. برای رسم آن‌ها ابتدا $x_0 = -\frac{b}{2a}$ را به دست می‌آوریم که رأس سه‌می نامیده می‌شود؛ با این نقطه و دو نقطه دیگر می‌توان نمودار سه‌می را رسم نمود. لذا کافی است در جدول نقطه‌یابی $x_0 - 1$ و $x_0 + 1$ را قرار داده و مقادیر تابع را در این نقاط محاسبه و نمودار را رسم کنیم.

توجه داشته باشید که می‌توانید نقاط بیشتری از تابع را برای رسم محاسبه کنید؛ ولی در حالت کلی سه نقطه مورد نظر نمودار را مشخص می‌کند. در این توابع اگر $a > 0$ باشد، رأس سه‌می نقطه مینیمم بوده، گودی نمودار رو به بالا و به شکل  است. هم‌چنین اگر $a < 0$ باشد، رأس سه‌می نقطه ماکزیمم بوده، گودی نمودار رو به پایین و به شکل  است.

مثال ۲. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$f(x) = -2x^2 - x$$

* گاهی ضابطه توابع درجه دوم به فرم $y = c(ax + b)^2 + d$ است. در این حالت برای یافتن طول رأس سهمی کافی است عبارتی که به توان دو رسیده مساوی صفر قرار دهیم؛ سپس برای رسم نمودار سهمی مانند حالت قبل از جدول نقطه‌یابی استفاده می‌کنیم.

مثال ۳. طول رأس سهمی‌های زیر را به دست آورید.

$$(i) f(x) = x^2, \quad (ii) f(x) = (x - 2)^2, \quad (iii) f(x) = -3(x - 1)^2, \quad (v) f(x) = -2(x + 1)^2 - 4$$

$$(i) x = 0, \quad (ii) x = 2, \quad (iii) x = 1, \quad (v) x = -1 \quad \text{حل.}$$

مثال ۴. نمودار توابع مثال قبل را رسم کنید.

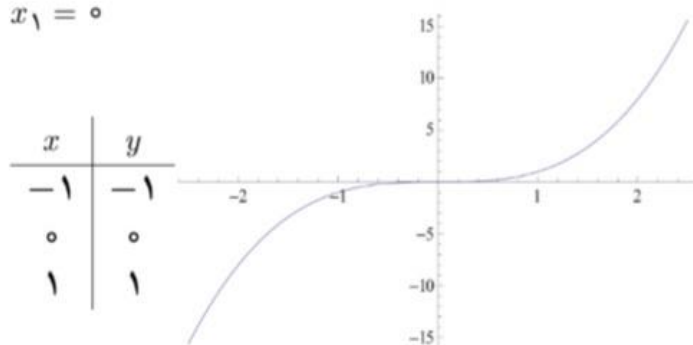
۳.۵ رسم نمودار توابع درجه سوم به فرم $y = c(ax + b)^3 + d$

برای رسم نمودار این توابع نیز ابتدا عبارتی که به توان سه رسیده مساوی صفر قرار می‌دهیم؛ مقدار x به دست آمده طول نقطه عطف تابع درجه سوم نامیده می‌شود. سپس مقادیر تابع را برای نقطه عطف (x_1) ، $x_1 + 1$ و $x_1 - 1$ در جدول نقطه‌یابی محاسبه و نمودار را رسم می‌کنیم. نمودار این توابع به شکل و یا به شکل است.

مثال ۵. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

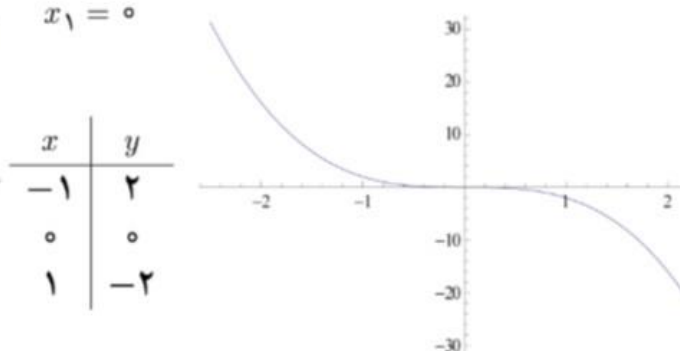
$$f(x) = x^3$$

$$x_1 = 0$$



$$f(x) = -2x^3$$

$$x_1 = 0$$



$$f(x) = -(x - 3)^3$$

$$f(x) = 5(x + 4)^3 + 2$$

۴.۵ رسم نمودار توابع رادیکالی

برای رسم نمودار توابع رادیکالی به فرم $y = c\sqrt{ax+b} + d$ ابتدا دامنه تابع را تعیین کرده، سپس در جدول نقطه یابی با توجه به دامنه به دست آمده چند نقطه را به دست می آوریم. توجه کنید در قسمتی که تابع تعریف نشده؛ یعنی جزو دامنه تابع نیست نموداری رسم نمی شود.

اگر $a, c > 0$ باشد، نمودار به شکل
 و اگر $a > 0$ و $c < 0$ باشد، نمودار به شکل
 است. هم چنین
 و اگر $a < 0$ و $c > 0$ باشد، نمودار به شکل
 است.

مثال ۶. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = 2\sqrt{x-3}$$

$$f(x) = -\sqrt{x+1}$$

$$f(x) = -3\sqrt{-x-5} + 2$$

۵.۵ رسم نمودار تابع قدر مطلق به فرم $c|ax+b| + d$

تابع دو ضابطه ای $f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$ تابع قدر مطلق نامیده می شود و با نماد $|x|$ نشان داده می شود. همان طور که از تعریف تابع قدر مطلق برمی آید، این تابع به ازای همه مقادیر مثبت است؛ به عبارت دیگر همواره $|x| \geq 0$.

برای رسم این تابع، ابتدا عبارت داخل قدر مطلق را مساوی صفر قرار داده، x را به دست می آوریم؛ سپس مقادیر تابع را به ازای نقطه x ، $x-1$ و $x+1$ محاسبه می کنیم؛ با این سه نقطه می توان نمودار تابع قدر مطلق را رسم کرد.

اگر $c > 0$ باشد، نمودار به شکل
 و ریشه عبارت داخل قدر مطلق طول نقطه مینیمم است؛ ولی اگر $c < 0$
 باشد، نمودار به شکل
 و ریشه عبارت داخل قدر مطلق طول نقطه ماکزیمم تابع است.

مثال ۹. $|4| = 4$, $|-6| = 6$, $|0| = 0$, $|\frac{7}{8}| = \frac{7}{8}$, $|-0.46| = 0.46$, $|5.8| = 5.8$, $|\frac{1}{\sqrt{7}}| = \frac{1}{\sqrt{7}}$

مثال ۱۰. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = |x+2|$$

$$f(x) = -3|x| + 1$$

$$f(x) = 2|x-1| - 1$$

۱.۶ توابع خاص

تعریف ۱. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که c عددی ثابت است، تابع ثابت نامیده می‌شود. هم‌چنین تابع $f(x) = x$ را $f(x) = c$

تابع همانی گوئیم که نمودار آن نیمساز ربع اول و سوم است. تابع $f(x) = -x$ نیز نیمساز ربع دوم و چهارم است.

تعریف ۲. تابع f یک‌به‌یک است هرگاه هیچ دو زوج متمایزی مؤلفه‌های دوم برابر نداشته باشد؛ یعنی برای هر عضو از برد تابع تنها یک عضو منحصر به فرد از دامنه موجود باشد.

تعریف ۳. تابع $f: A \rightarrow B$ پوشاست هرگاه برای هر $y_0 \in B$ ، عنصر $x_0 \in A$ موجود باشد به طوری که $f(x_0) = y_0$ ؛ یعنی هر خط $y = y_0 \in B$ نمودار تابع را حداقل در یک نقطه قطع کند. تابع یک‌به‌یک و پوشا را تناظر یک‌به‌یک می‌گوئیم.

تعریف ۴. فرض کنیم $(x, -x \in D_f)$ باشند. در این صورت تابع f زوج است اگر $f(-x) = f(x)$ و تابع f فرد است اگر $f(-x) = -f(x)$.

تعریف ۵. عبارت $\Delta x = x_2 - x_1$ را نمو x و $\Delta y = y_2 - y_1$ را نمو y می‌گوئیم.

تعریف ۶. تابع f صعودی است اگر برای هر $(x_1, x_2 \in D_f)$ از $x_1 < x_2$ نتیجه بگیریم $f(x_1) \leq f(x_2)$. (به طور معادل f صعودی است اگر برای هر $(x_1, x_2 \in D_f)$ داشته باشیم $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$)

به همین ترتیب، تابع f نزولی است اگر برای هر $(x_1, x_2 \in D_f)$ از $x_1 < x_2$ نتیجه بگیریم $f(x_1) \geq f(x_2)$. (به طور معادل f نزولی است اگر برای هر $(x_1, x_2 \in D_f)$ داشته باشیم $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$). توابع صعودی و نزولی را توابع یکنوا نیز می‌گویند.

نکات:

(i) برای تشخیص تابع از روی نمودار، اگر هر خط موازی محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، نمودار یک تابع خواهد بود.

(ii) برای تشخیص تابع از روی ضابطه، اگر از $x_1 = x_2$ نتیجه شود $f(x_1) = f(x_2)$ ، ضابطه یک تابع است.

(iii) برای تشخیص تابع یک‌به‌یک از روی نمودار، اگر هر خط موازی محور x ها نمودار را فقط در یک نقطه قطع کند، نمودار تابع یک‌به‌یک است.

(iv) برای تشخیص تابع یک‌به‌یک از روی ضابطه، اگر از $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه شود $x_1 = x_2$ ، ضابطه یک تابع یک‌به‌یک است.

(v) نمودار تابع‌های زوج نسبت به محور y ها متقارن و نمودار توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. لذا برای بررسی زوج یا فرد بودن تابع ابتدا باید متقارن بودن دامنه تابع را بررسی کنیم.

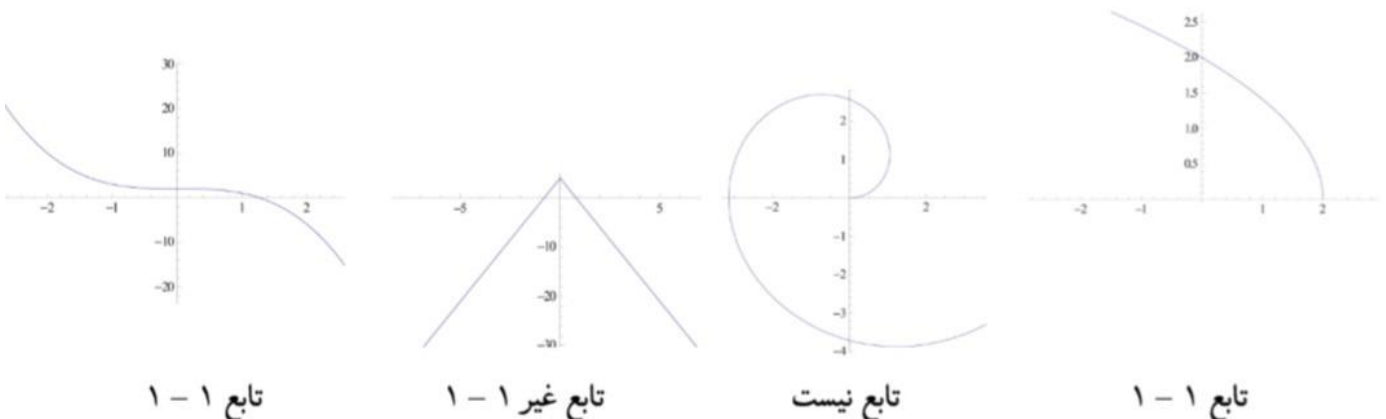
(vi) همه توابع با ضابطه $f(x) = x^{2n}$ و $f(x) = c$ که $n \in \mathbb{Z}$ و c عددی ثابت است، زوج هستند. همچنین همه توابع به صورت $f(x) = x^{2n+1}$ که $n \in \mathbb{Z}$ ، توابعی فرد هستند.

(vii) در تعریف ۶ برای تابع صعودی، چنانچه نامساوی آخر به صورت اکید $f(x_1) < f(x_2)$ (و یا به طور معادل $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$) باشد، تابع را صعودی اکید یا اکیداً صعودی می‌نامیم.

به همین ترتیب در مورد تابع نزولی نیز اگر نامساوی به صورت اکید $f(x_1) > f(x_2)$ (و یا به طور معادل $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$) باشد، تابع را نزولی اکید یا اکیداً نزولی می‌نامیم.

(viii) تابعی که در دامنه (یا قسمتی از دامنه) اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی است، در آن ناحیه یک به یک است.

مثال ۷. نمودارهایی که تابع هستند مشخص کرده و یک‌به‌یکی توابع را بررسی کنید.



مثال ۸. تابع بودن روابط زیر را از روی ضابطه بررسی کنید.

a. $f(x) = 2x$ b. $g(x) = x^2 + 1$ c. $y^2 = x$ d. $h(x) = \sqrt{x-3}$

مثال ۹. یک‌به‌یک بودن توابع زیر را از روی ضابطه بررسی کنید.

a. $f(x) = 2x + 3$ b. $g(x) = (x-1)^2 - 2$ c. $k(x) = -4x^3$ d. $h(x) = \sqrt{-3x+1}$

مثال ۱۰. زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

$f_1(x) = 5x^4 - x^2 + 1$

$f_2(x) = \frac{3}{x^2-4}$

$f_3(x) = \frac{1}{x+4}$

$f_4(x) = \sqrt{-x}$

$f_5(x) = \frac{1}{x^5}$

$f_6(x) = |x| - 4$

تذکره: اگر $a < b$ و $a < 0$ باشد، آنگاه $a^2 \leq b^2$ و اگر $a < b < 0$ باشد، آنگاه $a^2 \geq b^2$.

اگر $a < b$ و $a < 0$ باشد، آنگاه $|a| < |b|$ و اگر $a < b < 0$ باشد، آنگاه $|a| \geq |b|$.

مثال ۱۱. یکنوایی توابع زیر را در دامنه داده شده بررسی کنید.

$$f(x) = |x| - 1 \quad (x < -3), \quad g(x) = -5x^2, \quad h(x) = (x-1)^2 \quad (x \geq 1), \quad k(x) = 2\sqrt{x+3}$$

۲.۶ توابع چندضابطه‌ای

$$D_f = D_{g_1} \cup D_{g_2} \cup \dots \quad f(x) = \begin{cases} g_1(x) & , x \in D_{g_1} \\ g_2(x) & , x \in D_{g_2} \\ \vdots & , \vdots \end{cases} \quad \text{توابع چندضابطه‌ای در حالت کلی به فرم}$$

برای رسم نمودار این توابع، باید هر ضابطه را در دامنه داده شده در تعریف تابع رسم کنیم.

$$\text{مثال ۱۲. اگر } f(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & x \geq 0 \\ -5x, & x < 0 \end{cases} \quad , \quad h(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ -3x^2, & -1 \leq x < 1 \\ x + 7, & x \leq -1 \end{cases} \quad \text{و}$$

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+1}, & x \geq 4 \\ -7, & 0 \leq x < 4 \\ -(x-4)^2, & x < 0 \end{cases} \quad \text{باشد، آنگاه } g(0), g(5), g(1), g(0), g(-1), f(0), f(3), f(-2), h(0),$$

$h(-1), h(-7)$ را به دست آورید.

۳.۶ اعمال جبری روی توابع

تعریف ۱۳. اگر f و g دو تابع باشند و c عددی ثابت باشد، آنگاه

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad (cf)(x) = cf(x) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

همچنین دامنه این توابع به صورت زیر است؛

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g \quad D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} \quad D_{cf} = D_f$$

مثال ۱۴. اگر $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x} - 2$ باشد، $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(fg)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ و $(f \cdot g)(x)$ را محاسبه و دامنه هریک را به دست آورید.

مثال ۱۵. دامنه توابع زیر را به دست آورید.

$$i) f_1(x) = x^2 - 7 - \sqrt{2x+5}$$

$$ii) f_2(x) = \frac{1-x}{\sqrt{-7-x}}$$

$$iii) f_3(x) = \sqrt{x} + \frac{x^0}{8-4x}$$

$$v) f_4(x) = -x^2 - \frac{x}{x^2-9}$$

۴.۶ ترکیب توابع

تعریف ۱۶. اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب این دو تابع را با $f \circ g$ نشان داده و به صورت $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تعریف می‌کنیم. دامنه این تابع نیز مجموعه $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ است.

مثال ۱۷. اگر $f(x) = x - 2$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، $h(x) = \frac{x}{x}$ و $k(x) = x^2 + 1$ باشد، $f \circ g$ ، $g \circ h$ ، $h \circ k$ ، $k \circ f$ ، $f \circ h$ و $k \circ g$ را به دست آورید.

مثال ۱۸. اگر $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ و $h(x) = -\frac{x}{x+4}$ باشد، آنگاه $(f \circ g)(1)$ ، $(g \circ g)(2)$ ، $(f \circ h)(-8)$ ، $(h \circ g)(1)$ و $(h \circ h)(-10)$ را به دست آورید.

۱.۷ تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول $P_1 = ax + b$

برای تعیین علامت این دوجمله‌ای ابتدا ریشه آن را که برابر $-\frac{b}{a}$ است، به دست آورده و سپس مطابق جدول زیر عمل می‌کنیم.

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
P_1	مخالف علامت a	$\neq$	موافق علامت a

مثال ۱. توابع زیر را تعیین علامت کنید.

i) $y = x + 9$ ii) $y = -6x$ iii) $y = 5x - 2$ iv) $y = -7x - 21$

۲.۷ تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم $P_2 = ax^2 + bx + c$

برای تعیین علامت این عبارات، ابتدا دلتا $(\Delta = b^2 - 4ac)$ را به دست آورده، سپس با توجه به علامت Δ به یکی از سه روش زیر تعیین علامت می‌کنیم.

(الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، ریشه‌های $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ را محاسبه کرده و مطابق جدول زیر تعیین علامت می‌کنیم. ضروری است که ریشه‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ در ردیف x جدول زیر قرار دهیم.

x	$x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x > x_2$
P_2	موافق علامت a	$\neq$	مخالف علامت a	$\neq$	موافق علامت a

(ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، ریشه مضاعف معادله را که برابر $-\frac{b}{2a}$ است، محاسبه و طبق جدول زیر تعیین علامت می‌کنیم.

x	$x < -\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	$x > -\frac{b}{2a}$
P_2	موافق علامت a	$\neq$	موافق علامت a

(ج) اگر $\Delta < 0$ باشد، ریشه‌ای وجود ندارد و مطابق جدول زیر تعیین علامت می‌کنیم.

x	برای هر x
P_2	موافق علامت a

مثال ۲. توابع زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) y = x^2 - 8x - 9$$

$$۲) y = -4x^2 + 12x - 9$$

$$۳) y = -3x^2 + 2x - 4$$

$$۴) y = -2x^2 - 2x + 60$$

$$۵) y = x^2 - 16x + 64$$

$$۶) y = 7x^2 - 2x + 3$$

۳.۷ تعیین علامت عبارات به صورت ضرب چندجمله‌ای‌ها

برای تعیین علامت این‌گونه عبارات ابتدا ریشه‌ها را محاسبه و به ترتیب در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم. سپس هر یک از عوامل ضرب را در یک ردیف از جدول تعیین علامت قرار داده و هر ردیف را جداگانه تعیین علامت می‌کنیم. علامت هر ستون از ردیف آخر جدول که نتیجه تعیین علامت را در آن قرار می‌دهیم، از ضرب علامت ردیف‌های بالایی در همان ستون حاصل می‌شود. در مثال‌های زیر تنها مثال‌هایی که به صورت ضرب چندجمله‌ای‌های درجه اول و دوم هستند، آورده شده است؛ ولی این روش در حالت کلی برای ضرب هرگونه از عبارات برقرار است.

مثال ۳. توابع زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) y = 5x(x + 6)$$

$$۲) y = x(x - 7)(-x + 5)$$

$$۳) y = (2x - 8)(-3x - 9)(4x + 7)$$

$$۴) y = -x(x^2 - 1)(2x + 8)$$

$$۵) y = -4x^2(x^2 - x - 6)$$

$$۶) y = (-2x^2 + 12x - 18)(x^2 - x + 1)$$

نکته. برخی توابع را می‌توان با استفاده از تجزیه به صورت حاصل ضرب عبارات ساده‌تر تبدیل و سپس با به کار بردن مطالب قبلی به سادگی تعیین علامت کرد. این کار به خصوص برای چندجمله‌ای‌ها با درجه بیشتر از دو بسیار مفید است.

مثال ۴. توابع زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) y = -3x^3 + 18x^2 - 24x$$

$$۲) y = 4x^4 + 4x^2 - 3$$

$$۳) y = x^4 - 2.5x^2$$

$$۴) y = x^3 - 4x^2 + 4x$$

$$۵) y = -x^5 + 9x$$

$$۶) y = x^3 + 8$$

۴.۷ تعیین علامت عبارات کسری.

برای تعیین علامت عبارات کسری، ابتدا ریشه صورت و مخرج را تعیین کرده و پس از قرار دادن ریشه‌ها در جدول، هر یک از صورت و مخرج را در یک ردیف از جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم. با تعیین علامت عبارات هر ردیف به طور جداگانه و محاسبه علامت ردیف آخر حاصل از ضرب علامت ردیف‌های بالایی، تعیین علامت عبارت کامل می‌شود.

توجه کنید که در عبارات کسری تنها نقاطی که صورت صفر شده، در ردیف آخر صفر می‌شود و نقاطی که مخرج صفر است، در ردیف آخر تعریف نشده خواهد بود که با ∞ نشان داده می‌شود.

مثال ۵. توابع زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) y = \frac{4x}{x-7}$$

$$۲) y = \frac{3x+2}{-x}$$

$$۳) y = \frac{-x-5}{x^2-5x+6}$$

$$۴) y = \frac{-x^2+4}{-8x^2}$$

$$۵) y = \frac{-2(x-1)^2}{-3x^2+2x-1}$$

$$۶) y = \frac{5x-15}{x^2+7}$$